L^p -Fourier transforms for solvable Lie groups acting on Siegel domains (Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Representation)

AUTHOR(S):

井上, 順子

数理解析研究所講究録
761巻 1991年 147-159

L^p-Fourier transforms for solvable Lie groups acting on Siegel domains

九大・理　井上 順子 (Junko INOUE)

Lie群上のFourier解析における、Hausdorff-Young定理を考える。Kunze [K] により、ユニモジュラー I型の群での一般論が得られているが (§1)、本稿では §2で、ある非ユニモジュラー可解Lie群に対して、Hausdorff-Young型の不等式が成立する事、そして得られたL^p-Fourier変換の性質を述べる。また§3では、ユニモジュラー群も含めてL^p-Fourier変換のノルムを求める問題を取りあげる。

§1. 準備

ここでは、ユニモジュラー I型の群に於ける一般論 ([K], [L]) を [L] に従って簡単にまとめておく。Gを可分な局所コンパクト、ユニモジュラー、I型の群とし、dg をGのHaar測度とする。Gのユニタリ表現 π に対し、その$L^1(G)$の表現を $L^1(G) \ni \varphi \mapsto \pi(\varphi) = \int_G \pi(g)\varphi(g)\,dg$ で定めると、

Abstract Plancherel 定理により、Gのユニタリ双対$\hat{G}$には Plancherel 測度μが一意的に定まり、等式

$$\int_{\hat{G}} tr\,(\pi(\varphi)^{*}\pi(\varphi))\,d\mu(\pi) = \int_{G} |\varphi(g)|^{2} dg \tag{1.1}$$

$\varphi \in L^{1}(G) \cap L^{2}(G)$ が成り立つ。

次に $1 \leq p \leq \infty$ に対し、$\hat{G}$上の有界作用素値 measurable field Fで

$$\|F\|_{p} = \begin{cases} \left(\int_{\hat{G}} \|F(\pi)\|_{C_p}^{p} d\mu(\pi)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty & (p \neq \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{\pi \in \hat{G}} \|F(\pi)\| < \infty & \end{cases}$$

(ここで $\|F(\pi)\|_{C_p} = (tr\,(F(\pi)^{*}F(\pi))^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$) をみたすもの全体で測度μについて殆ど至る所一致するものを同一視して得られる空間を$L^{p}(\hat{G})$で表す。(これはノルム$\|\cdot\|_{p}$でBanach空間.)

Gに於ける Fourier 変換$\mathcal{F}$を、

$$\mathcal{F} : L^{1}(G) \to L^{\infty}(\hat{G})$$

$$(\mathcal{F}\varphi)(\pi) = \hat{\varphi}(\pi) = \int_{G} \varphi(g)\,\pi(g)\,dg \qquad \pi \in \hat{G}$$

で定義しよう。この時 $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varphi \in L^{1}(G) \cap L^{p}(G)$ に対して、Hausdorff-Young 型不等式

$$\|\hat{\varphi}\|_{q} \leq \|\varphi\|_{p} \tag{1.2}$$

が成立する。従って $\varphi \to \hat{\varphi}$ は有界作用素 $\mathcal{F}^{p}: L^{p}(G) \to L^{q}(\hat{G})$ に一意的に拡張される(これをL^{p}-Fourier 変換と呼ぶ)。

§2. ある非ユニモジュラー群に於ける L^p-変換

非ユニモジュラー群では、各既約表現 π に対し、作用素 $\pi(\varphi)$ $(\varphi \in L^1(G))$ がコンパクト作用素とは限らない等の事情により、L^p-Fourier 変換を定義するためには、元の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を修正する必要がある。$ax+b$ 群に対しては、Eymard－Terp [ET] による結果があるが、ここでは、その一般化として、次の条件 (2.1) をみたす Lie 環 $\mathfrak{g}$ をもつ連結、単連結 Lie 群 G を扱う。

<u>(2.1)</u> i) $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上 split solvable Lie 環

ii) 複素構造 $j: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を持つ

iii) j の可積分条件 $[jX, jY] = [X,Y] + j[jX,Y] + j[X,jY]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ をみたす

iv) $\omega \in \mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}$ の双対空間) で条件

$$\omega([X, jX]) > 0 \qquad X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$$

$$\omega([X,Y]) = \omega([jX, jY]) \qquad X, Y \in \mathfrak{g}$$

をみたすものが存在する。

(この時、組 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ は normal j-algebra と呼ばれ、対応する Lie 群は Siegel 領域の affine 自己同型から成る群として実現される。以前 [I] で取り扱った群なので詳細は省略する。)

以下、$G = \exp \mathfrak{g}$, dg を G の左 Haar 測度、Δ を G の modular 関数とする。この時、$\widehat{G}$ は 2^r 個 $(r = \dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]))$ の自乗

可積分表現を持つ。代表系をとって π_i $(i=1,\cdots,2^r)$、各表現空間を $\mathcal{H}_i$ としておく。(ここで G の既約表現 π が自乗可積分とは coefficient $\langle\pi(g)v, w\rangle$ $v, w\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$ で G 上自乗可積分なものが存在する時をいうが、G が非ユニモジュラーの場合自乗可積分でないものも同時に存在する。)

ここで Duflo-Moore による Plancherel 定理 [DM] を適用すると、次の形の Plancherel 定理が得られる。

(2.2) 1. 各 $i=1,\cdots,2^r$ に対して、$\mathcal{H}_i$ で稠密に定義された正の自己共役作用素 K_i で、次をみたすものが唯1つ存在する。

$$\pi_i(g)K_i\pi_i(g)^{-1} = \Delta(g)^{-1}K_i \qquad {}^\forall g\in G$$

$$\int_G |\langle\xi, \pi(g)\eta\rangle|^2 dg = \|\xi\|^2\|K^{-1/2}\eta\|^2$$

$${}^\forall\xi\in\mathcal{H},\ \eta\in\mathrm{dom}(K^{-1/2}) : K^{-1/2}\text{の定義域}$$

2. $\varphi\in L^1(G)\cap L^2(G)$ に対し、作用素 $\pi_i(\varphi)K_i^{1/2}$ は $\mathcal{H}_i$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素に拡張され(閉包をとって $[\pi_i(\varphi)K_i^{1/2}]$ と書く)、

$$\left(\sum_{i=1}^{2^r}\|[\pi_i(\varphi)K_i^{1/2}]\|_{C_2}^2\right)^{1/2} = \|\varphi\|_2$$

が成り立つ。そして $\varphi\mapsto\bigoplus_{i=1}^{2^r}[\pi_i(\varphi)K_i^{1/2}]$ は isometry

$$\mathcal{P}^2 : L^2(G)\longrightarrow\bigoplus_i C_2(\mathcal{H}_i)$$

($C_2(\mathcal{H}_i)$ は Hilbert-Schmidt 作用素の空間)に一意的に拡張され、これは全射である。

さて、$1\le r<\infty$ に対し、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_i$ 上の C_r-class 作用

素の空間を $C_r(\mathcal{H}_i) = \{ \|T\|_{C_r} = (\mathrm{tr}(T^*T)^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{r}} < \infty$ となる作用素T$\}$（ノルム $\|\cdot\|_{C_r}$ に関する Banach 空間） で表わす。また、同様の指数 r に対して $\varphi \in L^r(G)$ の時 $\varphi^{*(r)}(g) = \Delta(g)^{-\frac{1}{r}} \overline{\varphi(g^{-1})}$ $(g \in G)$ とする。 $\varphi \mapsto \varphi^{*(r)}$ は $L^r(G)$ の involution である。

(2.2) の作用素 K_i を用いて Fourier 変換を定めれば、$1<p<2$ に対する Hausdorff-Young 定理が成り立つという結果を得る。

(2.3) 定理 $1<p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 及び今までの条件と記号の下で、(1), (2) が成り立つ。

(1) $\varphi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し、作用素 $\pi_i(\varphi) K_i^{1/q}$ は $\mathcal{H}_i$ の C_q-class 作用素 $[\pi_i(\varphi) K_i^{1/q}]$ に拡張され、不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{2^r} \| [\pi_i(\varphi) K_i^{1/q}] \|_{C_q}^q \right)^{1/q} \leq A_p^{\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}} \|\varphi\|_p$$

但し $A_p = \left(\dfrac{p^{1/p}}{q^{\frac{1}{q}}} \right)^{1/2} < 1$

が成り立つ。

(2) $\varphi \mapsto \pi_i^p(\varphi) = [\pi_i(\varphi) K_i^{1/q}]$ は、有界作用素 $\pi_i^p : L^p(G) \to C_q(\mathcal{H}_i)$ $(i=1,\ldots,2^r)$ に一意的に拡張される。更に有界作用素 $\wp^p : L^p(G) \to \bigoplus_{i=1}^{2^r} C_q(\mathcal{H}_i)$ を $\varphi \mapsto \wp^p(\varphi) = \bigoplus_i \pi_i^p(\varphi)$ で定義すると、$\wp^p$ は単射で値域は稠密である。（全射ではない.） involution とは可換

$$\wp^p(\varphi^{*(p)}) = \bigoplus_i \pi_i^p(\varphi)^* = \wp^p(\varphi)^*$$

である。

次に、各L^p-Fourier変換に対する共役変換を考えよう。$1<p\leq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とし、$L^p(G)$と$L^q(G)$を

$$\langle \varphi, u\rangle = \int_G \varphi(g)\, u(g)\, dg, \quad \varphi\in L^p(G),\ u\in L^q(G)$$

により、それぞれ互いを双対空間と見做す。同様にHilbert空間$\mathcal{H}$に於て$C_p(\mathcal{H})$と$C_q(\mathcal{H})$の双対性を

$$\langle V, T\rangle = \mathrm{tr}(VT), \quad V\in C_p(\mathcal{H}),\ T\in C_q(\mathcal{H})$$

で定める。この時π_i^pの共役写像を$\hat{\pi}_i^p : C_p(\mathcal{H}_i)\to L^q(G)$ 即ち

$$\langle \hat{\pi}_i^p(V), \varphi\rangle = \langle V, \pi_i^p(\varphi)\rangle, \quad V\in C_p(\mathcal{H}_i),\ \varphi\in L^p(G)$$

とする。定理(2.3)より、各π_i^pの値域は稠密だから$\hat{\pi}_i^p$は単射である。ここで$\hat{\mathcal{P}}^p : \bigoplus_{i=1}^{2^r} C_p(\mathcal{H}_i)\to L^q(G)$を

$$\hat{\mathcal{P}}^p\left(\bigoplus_i V_i\right) = \sum_{i=1}^{2^r}\hat{\pi}_i^p(V_i), \quad V_i\in C_p(\mathcal{H}_i)\quad i=1,\cdots,2^r$$

で定めると、$\hat{\mathcal{P}}^p$は$\mathcal{P}^p$の共役写像であり、単射で、値域は稠密である。また$\mathcal{P}^p$と同様$\hat{\mathcal{P}}^p$もinvolutionと可換である。即ち

$$\hat{\mathcal{P}}^p\left(\bigoplus_i V_i^*\right) = \mathcal{P}^p\left(\bigoplus_i V_i\right)^{*(q)}.$$

今度は$p=1$の場合を考える。始めの$L^1(G)$の表現で、$\mathcal{P}^1 : L^1(G)\to \bigoplus_i \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ （$\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$は有界作用素の空間）を定義しておく。即ち $\varphi\in L^1(G)$ に対し

$$\mathcal{P}^1(\varphi) = \bigoplus_i \pi_i(\varphi).$$

次に $T_i\in C_1(\mathcal{H}_i)$ に対し、G上の関数$\hat{\pi}_i(T_i)$を

$$\hat{\pi}_i(T_i)(g) = \mathrm{tr}(\pi_i(g)T_i), \quad g\in G$$

で定義し、$\bigoplus_i T_i \in \bigoplus_i C_1(\mathcal{H}_i)$ に対し

$$\hat{\mathscr{P}}^1(\bigoplus_i T_i) = \sum_i \hat{\pi}_i(T_i)$$

とする。この時 $\hat{\pi}_i(T_i)$, $\hat{\mathscr{P}}^1(\oplus T_i)$ は、無限遠で0となる連続関数である。実際、これらの関数は、適当な $f, h \in L^2(G)$ をとって、$f * h^{*(\infty)}$, 但し $h^{*(\infty)}(g) = \overline{h(g^{-1})}$, の形で表せる、即ち Eymard の導入した Fourier algebra [E] に属する事が分かる。(更に $\hat{\mathscr{P}}^1(\oplus C_1(\mathcal{H}_i))$ は Fourier algebra 全体と一致するが、本稿では、Fourier algebra 及び、$p=1$ の場合の双対性の問題については省略する。) $\hat{\mathscr{P}}^1$ の定義から

$$\hat{\mathscr{P}}^1(\bigoplus_i T_i^*) = \hat{\mathscr{P}}^1(\bigoplus_i T_i)^{*(\infty)}.$$

以上で準備した共役変換を用いて、逆変換の公式が得られる。L^p-Fourier 変換は指数により異なるので、次の定理で述べる様に、独立した2つの指数に依る形になる。

<u>(2.4)定理</u>. $1 \leq p, r \leq 2$　$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ とし、条件及び記号は前述の通りとする。

(1) $\varphi \in L^p(G)$ とする。φ が $\hat{\mathscr{P}}^r$ の値域に含まれる必要十分条件は、作用素 $\mathscr{P}^p(\varphi)(\bigoplus_i K_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}})$ が C_r-class 作用素に拡張される事である。この時

$$\overline{\varphi}^{*(s)} = \hat{\mathscr{P}}^r\left([\mathscr{P}^p(\varphi)(\bigoplus_i K_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}})]\right)$$

即ち、

$$\overline{\varphi} = \hat{\mathscr{P}}^r\left((\bigoplus_i K_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}})\mathscr{P}^p(\varphi)^*\right).$$

(2) $\bigoplus_i V_i \in \bigoplus_i C_r(\mathcal{H}_i)$ とする。$\hat{\mathcal{F}}^r(\bigoplus_i V_i) \in L^p(G)$ であるための必要十分条件は $\bigoplus_i K_i^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} V_i$ が $\mathcal{F}^p$ の値域に含まれる事である。この時

$$V_i = K_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \pi_i^p \left(\overline{\hat{\pi}_i^r(V_i)}\right)^* \qquad i=1,\cdots,2^r.$$

$r=1$ の場合を系としてまとめておく。

(2.5) 系. $1 \leqslant p \leqslant 2$, 及び定理(2.4)と同様の記号の下で

(1) $\varphi \in L^p(G)$ とする。φ が $\hat{\mathcal{F}}^1$ の値域に含まれる必要十分条件は、作用素 $\mathcal{F}^p(\varphi)(\bigoplus_i K_i^{\frac{1}{p}})$ が C_1-class 作用素に拡張される事である。この時

$$\varphi(g) = \sum_{i=1}^{2^r} \mathrm{tr}\left(\pi_i(g)^{-1}[\pi_i^p(\varphi) K_i^{\frac{1}{p}}]\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{2^r} \mathrm{tr}\ [\pi_i^p(\rho(g^{-1})\varphi) K_i^{\frac{1}{p}}], \qquad g \in G$$

但し $\rho(g^{-1})\varphi(x) = \varphi(gx)$ とする。

(2) $\bigoplus_i V_i \in \bigoplus_i C_1(\mathcal{H}_i)$ とする。$\hat{\mathcal{F}}^1(\bigoplus_i V_i) \in L^p(G)$ であるための必要十分条件は、$\bigoplus_i K_i^{-\frac{1}{p}} V_i$ が $\mathcal{F}^p$ の値域に含まれる事である。この時

$$V_i = K_i^{\frac{1}{p}} \pi_i^p \left(\Delta^{-\frac{1}{p}} \mathrm{tr}(\pi(\cdot)^{-1} V)\right).$$

§3. L^p-Fourier 変換のノルム

再びユニモジュラー Lie 群を対象として、L^p-Fourier 変換

のノルムについての問題を取りあげる。§1での、ユニモジュラー群Gにおける Hausdorff-Young 不等式 (1.2) は、等式 (1.1) が成立する様に、測度を正規化した時、L^p-Fourier 変換 $\mathcal{F}^p$ のノルム

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\hat{\varphi}\|_q \leq 1$$

を示している。そこで、個々の群 G に対して $\|\mathcal{F}^p(G)\|$ を求めるという問題を考えてみたい。知られている結果としては、次がある。以下 $1<p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする。

1. G がコンパクト群の場合 $\|\mathcal{F}^p(G)\| = 1$ で、関数 φ が G の character の時 等式 $\|\hat{\varphi}\|_q = \|\varphi\|_p$ が成り立つ。

2. $\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$ (Babenko, Beckner [B]) ここで $A_p = \left(\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\right)^{1/2}$. Gaussian function $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exp(-a(x_1^2 + \cdots + x_n^2))$, $a>0$ が等式 $\|\hat{\varphi}\|_q = A_p^n \|\varphi\|_p$ をみたす。

3. <u>定理</u> (Fournier [F], Russo [R1]) G を局所コンパクトユニモジュラー群, $1<p<2$ とする。次の3つの主張は同値である。

(a) $\|\mathcal{F}^p(G)\| = 1$

(b) G はコンパクト開部分群を持つ。

(c) $\|\hat{\varphi}\|_q = \|\varphi\|_p \neq 0$ をみたす $\varphi \in L^p(G)$ が存在する

以下 G を連結、単連結 nilpotent Lie 群とする。この時 3 の定理により、$\|\mathscr{P}^p(G)\| < 1$ であるが、より良い評価として

4. (Russo [R2]) $\|\mathscr{P}^p(G)\| \leq A_p^m$ ここで $m = G$ の center の次元

がある。筆者は G が以下で述べる条件 (3.1) をみたす場合に 4 より良い評価を得たので、命題として述べておく。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環、$\mathfrak{g}^*$ をその双対空間とする。$\hat{G}$ は、G の $\mathfrak{g}^*$ 上の coadjoint 作用の軌道空間 $\mathfrak{g}^*/G$ で、Kirillov 写像によりパラメトライズされるが、この写像は Borel 同型であり、更に $\hat{G}$ での Plancherel 測度の同値類は、$\mathfrak{g}^*$ の Lebesgue 測度の、$\mathfrak{g}^*/G$ への像測度の同値類に対応する事が知られている。実際、最大次元の軌道全体は $\mathfrak{g}^*$ で Zariski open であり、G の正則表現は、最大次元の軌道に対応する既約表現の直積分に分解する事に注意しておく。

<u>(3.1) 条件</u> $\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\mathfrak{h}$ で、$\mathfrak{g}^*$ の Lebesgue 測度に関して殆どすべての $f \in \mathfrak{g}^*$ に対し

$$\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{h}$$

をみたすものが存在する。ここで $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g};\ f([X, \mathfrak{g}]) = \{0\}\}$.

(3.2) 命題. $G=\exp\mathfrak{g}$ は連結、単連結 nilpotent Lie 群で、条件 (3.1) をみたすとする。G の coadjoint orbit の次元の最大を l とし、$d=\dim\mathfrak{g}-l$ とおく。この時

$$\|\mathcal{P}^p(G)\| \leq A_p^{\frac{\dim\mathfrak{g}+d}{2}}.$$

例.1. G が mod center で自乗可積分な表現を持つ場合：G の既約表現 $(\pi,\mathcal{H})$ が mod center で自乗可積分とは、関数 $g\mapsto|\langle\pi(g)v,w\rangle|$, $v,w\in\mathcal{H}$ を G/Z （Z は G の center）の関数と見做して自乗可積分である時をいうが、この必要十分条件は、対応する coadjoint orbit 上の点 f に対し、$\mathfrak{g}(f)=\mathfrak{g}$ の center となる事である。従ってこの場合最大次元の軌道は全て自乗可積分表現に対応し、条件 (3.1) での $\mathfrak{h}=\text{center}(=\mathfrak{z})$ にとれる。そして

$$\|\mathcal{P}^p(G)\| \leq A_p^{\frac{\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{z}}{2}}$$

となる。この様な群には、例えば Heisenberg 群がある。

§2 で扱った群の場合、center $=\{0\}$ に注意すれば、定理 (2.3) で得られる評価：$\|\mathcal{P}^p(G)\|\leq A_p^{\frac{\dim\mathfrak{g}}{2}}$ は、例1の評価に対応する非ユニモジュラー群での結果といえる。

例2. $G=N_n$：n 次、実、上三角，対角成分が 1 の行列全体がなす nilpotent Lie 群：N_n は条件 (3.1) をみたす。軌道の

最大次元は $\frac{n(n-1)}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ である。従って

$$\|\mathcal{F}^p(N_n)\| \leq A_p^{\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{n+1}{2}\right]}。$$

（注意. $n\geqq 4$ の時. 例1には含まれていない.）

References

[B] W.Beckner, Inequalities in Fourier analysis, Ann.of Math. 102 (1975), 159-182.

[DM] M.Duflo and C.C.Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, J.Funct.Anal. 21 (1976), 209-243.

[E] P.Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localment compact, Bull.Soc.math.France 92 (1964), 181-236.

[ET] P.Eymard et M.Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des ax+b d'un corps local, Lecture Notes in Mathematics, 739, Springer, 1979, 207-248.

[F] J.J.F.Fournier, Sharpness in Young's inequality for convolution, Pacific J.Math. 72 (1977), 383-397.

[I] J.Inoue, Fourier transforms for affine automorphism groups on Siegel domains, 数理研講究録 712 (1990), 118-135.

[K] R.A.Kunze, L^p Fourier transforms on locally compact unimodular groups, Trans.AMS 89 (1958), 519-540.

[L] R.L.Lipsman, Non-abelian Fourier analysis, Bull. Sc. math. 98 (1974), 209-233.

[R1] B.Russo, The norm of the L^p-Fourier transform on unimodular groups, Trans. AMS 192 (1974), 293-305.

[R2] B.Russo, On the Hausdorff-Young theorem for integral operators, Pacific J. Math. 68 (1977), 241-253.